n'est pas essentielle, au fond il vaut mieux de faire la distinction entre les systèmes d'équations différentielles, dont la solution ne dépend que de constantes arbitraires et les équations, dont les solutions ont une indétermination plus grande.

[Größere Ausbeute liefert Nr. 14 von Paket LXIV.]

7. Considérons un système d'équations différentielles en les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et les variables dépendantes $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ et supposons que la solution la plus générale $\mathfrak{x}_1', \ldots, \mathfrak{x}_m'$ se déduise d'une solution spéciale $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ quelconque par des formules:

$$\mathfrak{x}_k' = f_k(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m)$$

qui définissent un groupe continu fini ou infini entre les variables $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ et $\mathfrak{x}_1', \ldots, \mathfrak{x}_m'$. Si les f_k contiennent les quantités $x_1, \ldots, x_n$ ces grandeurs jouent le rôle de constants. En outre les f_k contiennent des constants arbitraires ou des fonctions arbitraires ou des éléments arbitraires d'un ordre encore plus élevé. Nous désignons la transformation infinitésimale de notre groupe par Xf:

$$Xf = \xi_1(\mathfrak{x})\,\mathfrak{p}_1 + \cdots + \xi_m(\mathfrak{x})\,\mathfrak{p}_m.$$

Maintenant on reconnait facilement que le système d'équations différentielles donné, abstraction faite de quelques cas particuliers, peut obtenir la forme:

$$I_k\left(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m, \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1}, \ldots\right) = B_k(x),$$

où les B_k sont des fonctions données des x et les I_k forment un système complet d'invariants différentielles du groupe Xf.

8. Je dis maintenant que le problème d'intégration des équations $I_k = B_k$ se réduit à un nombre fini de problèmes de même genre pour lesquels le groupe est simple.

En effet supposons que le groupe Xf ne soit pas simple et désignons par $X'f$ les transformations infinitésimales d'un sousgroupe invariant. Alors les I_k sont évidemment invariants par le sousgroupe qui laisse en outre invariants certaines quantités $J_1, J_2, \ldots$ Soit $I_1, I_2, \ldots, J_1, J_2, \ldots$ un système complet d'invariants du sousgroupe. Comme les $X'f$ satisfont à des équations de la forme:

$$XX'f - X'Xf = \overline{X}'f,$$

$\overline{X}'f$ désignant aussi une transformation infinitésimale du sousgroupe, on reconnait immédiatement, en faisant $f = J$, que les XJ s'expriment en fonctions connues des x et J. On reconnait aussi que les J soient déterminés en fonctions des x par un système d'équations diffé-

rentielles qui possède les propriétés caractéristiques des équations $I_k = B_k$. Ces équations nouvelles ont la forme:

$$U\left(J, \frac{\partial J}{\partial x}, \ldots\right) = B'(x),$$

les B' étant des fonctions connues des x et des U formant un système complet d'invariants différentiels du groupe qui transforme les J.

9. Supposons que les équations $U = B'$ soient intégrées et les J déterminés en fonctions des x et de certains éléments arbitraires. Alors les équations:

$$I(\mathfrak{x}) = B, J = \cdots$$

forment un nouveau système d'équations différentielles qui possède les mêmes propriétés caractéristiques comme le système $I_k = B_k$.

Nous avons donc reconnu que l'intégration du système $I_k = B_k$, lorsque le groupe Xf n'est pas simple, se décompose en deux problèmes du même caractère, dont les groupes Yf et $X'f$ ne contiennent (sit venia verbo) autant transformations que le groupe Xf.

Notre problème se décompose ensuite lorsque le groupe Xf n'est pas simple en un nombre fini de problèmes analogues aux groupes simples.

[Offenbar setzt Lie stillschweigend voraus, daß die invariante Untergruppe $X'f$ in keiner größeren invarianten Untergruppe steckt, denn nur dann kommt man bei der Zerlegung des Problems auf ein Problem derselben Art mit einfacher Gruppe. Aber diese Voraussetzung ist nur bei endlichen kontinuierlichen Gruppen immer erlaubt, bei gewissen unendlichen kontinuierlichen Gruppen ist sie es nicht, wie Cartan zuerst bemerkt hat. Vgl. Bd. VI, S. *891*, Z. 7 v.u. — *892*, Z. 23.]

10. On sait qu'on peut substituer à chaque système d'équations différentielles ordinaires une seule équation linéaire à différentielles partielles:

$$Xf = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Pour ma part je substitue au problème de l'intégration de l'équation $Xf = 0$ le problème de réduire la transformation infinitésimale Xf à la forme canonique d'une translation infinitésimale.

C'est vrai que ces deux problèmes sont à peu près équivalents. En effet, si Xf prend dans les variables $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ la forme $\partial f : \partial \mathfrak{x}_n$, les quantités $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}$ constituent un système de solutions de l'équation $Xf = 0$; d'autre part, si l'on connait un système de solutions de l'équation $Xf = 0$, la réduction de Xf à la forme canonique demande seulement une quadrature. Néanmoins il est en général préférable de substituer la réduction de Xf à sa forme canonique au problème de l'intégration de l'équation $Xf = 0$.

n'est pas essentielle, au fond il vaut mieux de faire la distinction entre les systèmes d'équations différentielles, dont la solution ne dépend que de constantes arbitraires et les équations, dont les solutions ont une indétermination plus grande.

[Größere Ausbeute liefert Nr. 14 von Paket LXIV.]

7. Considérons un système d'équations différentielles en les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et les variables dépendantes $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ et supposons que la solution la plus générale $\mathfrak{x}_1', \ldots, \mathfrak{x}_m'$ se déduise d'une solution spéciale $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ quelconque par des formules:

$$\mathfrak{x}_k' = f_k(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m)$$

qui définissent un groupe continu fini ou infini entre les variables $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ et $\mathfrak{x}_1', \ldots, \mathfrak{x}_m'$. Si les f_k contiennent les quantités $x_1, \ldots, x_n$ ces grandeurs jouent le rôle de constants. En outre les f_k contiennent des constants arbitraires ou des fonctions arbitraires ou des éléments arbitraires d'un ordre encore plus élevé. Nous désignons la transformation infinitésimale de notre groupe par Xf:

$$Xf = \xi_1(\mathfrak{x})\,\mathfrak{p}_1 + \cdots + \xi_m(\mathfrak{x})\,\mathfrak{p}_m.$$

Maintenant on reconnait facilement que le système d'équations différentielles donné, abstraction faite de quelques cas particuliers, peut obtenir la forme:

$$I_k\left(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m, \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1}, \ldots\right) = B_k(x),$$

où les B_k sont des fonctions données des x et les I_k forment un système complet d'invariants différentielles du groupe Xf.

8. Je dis maintenant que le problème d'intégration des équations $I_k = B_k$ se réduit à un nombre fini de problèmes de même genre pour lesquels le groupe est simple.

En effet supposons que le groupe Xf ne soit pas simple et désignons par $X'f$ les transformations infinitésimales d'un sousgroupe invariant. Alors les I_k sont évidemment invariants par le sousgroupe qui laisse en outre invariants certaines quantités $J_1, J_2, \ldots$ Soit $I_1, I_2, \ldots, J_1, J_2, \ldots$ un système complet d'invariants du sousgroupe. Comme les $X'f$ satisfont à des équations de la forme:

$$XX'f - X'Xf = \overline{X}'f,$$

$\overline{X}'f$ désignant aussi une transformation infinitésimale du sousgroupe, on reconnait immédiatement, en faisant $f = J$, que les XJ s'expriment en fonctions connues des x et J. On reconnait aussi que les J soient déterminés en fonctions des x par un système d'équations diffé-